文章编号: 1000-6788(2009)06-0132-07

灰色二层线性规划问题及其解法

张恩路 [1], 孟宪云 [1], 李智慧 [1], 滕春贤 [2]

(1. 燕山大学 理学院, 秦皇岛 066004; 2. 哈尔滨理工大学 系统工程研究所, 哈尔滨 150080)

摘　要 针对二层线性规划问题, 结合灰色系统的特性, 提出了一般灰色二层线性规划问题, 并给出了该问题的模型及相关的定理. 针对漂移型灰色二层线性规划, 基于单纯形法提出了一种具有全局收敛性质的算法来求解该问题. 用下层的 Kuhn-Tucker 条件代替下层问题, 将灰色二层线性规划转化为灰色单层规划问题, 利用对偶理论将该单层规划转化为一系列灰色线性规划问题, 从而用单纯形法求解该问题来得到灰色二层线性规划问题的解. 最后, 通过算例验证了文中算法的有效性.

关键词　灰色系统; 二层规划; 单纯形法; 全局收敛

中图分类号　O221.1; N941.5　　　**文献标志码**　A

Problem of grey bilevel linear programming and its algorithm

ZHANG En-lu[1], MENG Xian-yun[1], LI Zhi-hui[1], TENG Chun-xian[2]

(1. College of Sciences, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China; 2. The Systems Engineering Institute, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract Based on the bilevel linear programming and the characteristic of grey system, a general gray bilevel linear programming problem with its model and theorem are given. A globally convergent algorithm based on simplex method is given to solve the drifting grey bilevel linear programming problem. Replacing the lower level problem by its Kuhn-Tucker condition, the gray bilevel linear programming is transformed into a gray single level programming problem, which can be transformed into a series of gray linear programming problem by use of the dual theory. So these problems can be solved by simplex method to obtain the solution of the gray bilevel linear programming problem. Finally, an example is adopted to verify the effectiveness of the proposed algorithm.

Keywords grey system; bilevel programming; simplex method; global convergence

1 引言

二层规划是一种递阶结构系统 [1], 这个系统由两个决策者控制, 即上层决策者和下层决策者, 其中上层决策者占主导地位. 上层决策者首先给出一个决策变量, 上层的选择策略既影响下层的目标, 也影响下层的决策空间. 下层针对上层的决策, 根据自己的偏好选择出自己的一个决策来优化自己的目标. 这样下层的决策也影响上层的目标, 通过反复地选择与调节, 使上、下层目标都能达到最优.

迄今为止, 人们曾应用二层规划的决策思想与优化技术成功地解决了诸如资源分配, 财政预算, 价格控

收稿日期: 2008-01-22
资助项目: 国家自然科学基金 (70471067); 河北省教育厅科学研究计划项目 (2007323)
作者简介: 张恩路 (1983–), 男, 山东武城人, 硕士研究生, 从事二层决策系统优化方向研究; 李智慧 (1964–), 女, 辽宁台安人, 副教授, 从事决策系统优化问题的研究; 滕春贤 (1947–), 男, 博士生导师, 从事系统分析与优化的研究.

制 [2−4] 等实际问题. 而在电力市场中, 售电商需要购买电力, 主要是通过现货市场的现货购买和中长期合约的交易. 现货交易一般指目前市场的交易. 由于许多因素 (如电力负荷等) 的影响, 现货交易中的电价往往呈现出不确定性 [5]. 中长期合约交易具有回避风险, 稳定市场的作用, 要求发电商和售电商双方按预定签订的合约商定付款方式, 买卖电量, 在一定时间内进行实物交割的交易, 它包括合约电量、合约电价等主要参数. 现在的问题是, 在某一时间段, 当现货价格是随机变量时, 为了获得最大的经济效益, 发电商选择多少合约电量以及如何确定合约电价, 售电商根据现货价格确定多少合约电量及现货交易量. 根据 Stackelberg 对策 [6−7] 的有关理论, 这是一个典型的主从递阶决策问题, 即二层线性规划问题. 而这个二层规划问题与一般的二层规划模型又有所不同, 它的上下层目标函数的决策系数 (合约执行电价, 合约保留电价) 都是在一定范围内的随机变量 [8], 即都带有灰色的特征. 这就是本文所研究的具有灰色特征的二层线性规划问题的实际背景, 为此, 本文研究了灰色二层线性规划问题.

2 一般灰色二层线性规划问题

定义 1 设 $\otimes$ 为灰参数集 [9], 则一般灰色二层线性规划模型 (BLPGP) 可表达为:

$$(\mathrm{P}_1)\max_x f_1(x,y)=a(\otimes)x+b(\otimes)y$$

其中 y 解

$$\begin{aligned}&(\mathrm{P}_2)\max_y f_2(x,y)=c(\otimes)x+d(\otimes)y\\&\text{s.t. } A(\otimes)x+B(\otimes)y\le r(\otimes)\\&x,y\ge 0\end{aligned}\tag{1}$$

上述各式中: $f_1(x,y)$、$f_2(x,y)$ 分别是 BLPGP 的上层和下层目标函数, $x\in R^{n_1}$, $y\in R^{n_2}$ 分别是 BLPGP 的上层和下层决策变量. 其中

$$\begin{aligned}&a(\otimes)=[a_1(\otimes),a_2(\otimes),\cdots,a_{n_1}(\otimes)],b(\otimes)=[b_1(\otimes),b_2(\otimes),\cdots,b_{n_2}(\otimes)]\\&c(\otimes)=[c_1(\otimes),c_2(\otimes),\cdots,c_{n_1}(\otimes)],d(\otimes)=[d_1(\otimes),d_2(\otimes),\cdots,d_{n_2}(\otimes)]\\&A(\otimes)=[a_{ij}(\otimes)]_{mn_1},B(\otimes)=[b_{ij}(\otimes)]_{mn_2},r(\otimes)=[r_1(\otimes),r_2(\otimes),\cdots,r_m(\otimes)]\\&a_i(\otimes)\in[\underline{a}_i,\bar{a}_i],b_j(\otimes)\in[\underline{b}_j,\overline{b}_j],c_i(\otimes)\in[\underline{c}_i,\bar{c}_i],\quad d_j(\otimes)\in[\underline{d}_j,\bar{d}_j]\\&a_{ki}(\otimes)\in[\underline{a}_{ki},\bar{a}_{ki}],b_{kj}(\otimes)\in[\underline{b}_{kj},\overline{b}_{kj}],r_k(\otimes)=[\underline{r}_k,\bar{r}_k]\\&i=1,2,\cdots,n_1;j=1,2,\cdots,n_2;k=1,2,\cdots,m.\end{aligned}$$

定义 2 设 $\alpha_i,\beta_j,\delta_i,\gamma_j,\rho_{ki},\sigma_{kj},\zeta_k\in[0,1]$ 为模型的白化系数, 令灰参数的白化值分别为

$$\begin{aligned}&\tilde{a}_i(\otimes)=\underline{a}_i+\alpha_i(\bar{a}_i-\underline{a}_i),\tilde{b}_j(\otimes)=\underline{b}_j+\beta_j(\overline{b}_j-\underline{b}_j),\tilde{c}_i(\otimes)=\underline{c}_i+\delta_i(\bar{c}_i-\underline{c}_i)\\&\tilde{d}_j(\otimes)=\underline{d}_j+\gamma_j(\overline{d}_j-\underline{d}_j),\tilde{a}_{ki}(\otimes)=\underline{a}_{ki}+\rho_{ki}(\bar{a}_{ki}-\underline{a}_{ki})\\&\tilde{b}_{kj}(\otimes)=\underline{b}_{kj}+\sigma_{kj}(\overline{b}_{kj}-\underline{b}_{kj}),r_k(\otimes)=\underline{r}_k+\zeta_k(\bar{r}_k-\underline{r}_k)\end{aligned}$$

其中

$$i=1,2,\cdots,n_1;j=1,2,\cdots,n_2;k=1,2,\cdots,m.$$

则称

$$(\mathrm{P}_1)\max_x f_1(x,y)=\tilde{a}(\otimes)x+\tilde{b}(\otimes)y$$

其中 y 解

$$\begin{aligned}&(\mathrm{P}_2)\max_y f_2(x,y)=\tilde{c}(\otimes)x+\tilde{d}(\otimes)y\\&\text{s.t. } \tilde{A}(\otimes)x+\tilde{B}(\otimes)y\le\tilde{r}(\otimes)\\&x,y\ge 0\end{aligned}$$

为 BLPGP 的定位规划.

记 BLPGP 的约束域为 $S=\{(x,y)|\,A(\otimes)x+B(\otimes)y\le r(\otimes),x,y\ge 0\}$, S 在上层决策空间上的投影为 $T=\{x:(x,y)\in S\}$. 对于每个固定的 $x\in T$, 下层问题的约束域为 $\Omega(x)=\{y\,|B(\otimes)y\le r-A(\otimes)x,y\ge 0\}$, $M(x)=\{y\,|y\in\arg\max\{f_2(x,y),y\in\Omega(x)\}\}$ 为下层问题的合理反应集, $R=\{(x,y)\,|(x,y)\in S,y\in M(x)\}$ 为 $BLPGP$ 的可行域.

定义 3 设对 $\forall\, i=1,2,\cdots,n_1$; $j=1,2,\cdots,n_2$ 和 $k=1,2,\cdots,m$ 有

$$\alpha_i=\alpha,\beta_j=\beta,\delta_i=\delta,\gamma_j=\gamma,\rho_{ki}=\rho,\sigma_{kj}=\sigma,\zeta_k=\zeta$$

则称相应的定位规划为 $(\alpha,\beta,\delta,\gamma,\rho,\sigma,\zeta)$ 定位规划, 记为 $BLP(\alpha,\beta,\delta,\gamma,\rho,\sigma,\zeta)$, 其上层目标函数最优值记为 $\max f_1(\alpha,\beta,\delta,\gamma,\rho,\sigma,\zeta)$, 其约束域记为 $S(\rho,\sigma,\zeta)$, 其可行域记为 $R(\delta,\gamma,\rho,\sigma,\zeta)$.

定理 1 在可行域 $R(\delta,\gamma,\rho,\sigma,\zeta)$ 中, 固定白化系数 δ,γ, 可得以下结论:

1) 对 $\forall\rho_1,\rho_2,\sigma_1,\sigma_2,\zeta\in[0,1]$, 若 $\rho_1\le\rho_2,\sigma_1\le\sigma_2$, 则 $R(\rho_2,\sigma_2,\zeta)\subseteq R(\rho_1,\sigma_1,\zeta)$;

2) 对 $\forall\rho,\sigma,\zeta_1,\zeta_2\in[0,1]$, 若 $\zeta_1\le\zeta_2$, 则 $R(\rho,\sigma,\zeta_1)\subseteq R(\rho,\sigma,\zeta_2)$.

证明 1) 先证 $S(\rho_2,\sigma_2,\zeta)\subseteq S(\rho_1,\sigma_1,\zeta)$. 设模型的约束条件的系数分别为 $A(\rho),B(\sigma),r(\zeta)$, 任取 $(x,y)\in S(\rho_2,\,\sigma_2,\zeta)$, 由已知条件得:

$$A(\rho_2)x+B(\sigma_2)y\le r(\zeta)$$

则

$$\begin{aligned}A(\rho_1)x+B(\sigma_1)y&=A(\rho_2)x+[A(\rho_1)-A(\rho_2)]x+B(\sigma_2)y+[B(\sigma_1)-B(\sigma_2)]y\\&=A(\rho_2)x+B(\sigma_2)y+(\rho_1-\rho_2)(\bar{A}-\underline{A})x+(\sigma_1-\sigma_2)(\bar{B}-\underline{B})y.\end{aligned}$$

因为 $\rho_1\le\rho_2,\sigma_1\le\sigma_2,x,y\ge 0$, 所以 $A(\rho_1)x+B(\sigma_1)y\le A(\rho_2)x+B(\sigma_2)y\le r(\zeta)$, 故 $(x,y)\in S(\rho_1,\sigma_1,\zeta)$, 从而 $S(\rho_2,\sigma_2,\zeta)\subseteq S(\rho_1,\sigma_1,\zeta)$. 对于固定的白化系数 δ,γ, 任取 $(x^*,y^*)\in R(\rho_2,\sigma_2,\zeta)$, 则 $(x^*,y^*)\in S(\rho_2,\sigma_2,\zeta)$, 亦有 $(x^*,y^*)\in S(\rho_1,\sigma_1,\zeta)$.

由于 $\max\limits_y f_2(x,y)=\max\sum\limits_{i=1}^{n_1}(\underline{c}_i+\delta_i(\bar{c}_i-\underline{c}_i))x_i+\sum\limits_{j=1}^{n_2}(\underline{d}_j+\gamma_j(\bar{d}_j-\underline{d}_j))y_j$, 则有

$$\max_y f_2(x,y)=f_2(x^*,y^*)=\sum_{i=1}^{n_1}(\underline{c}_i+\delta_i(\bar{c}_i-\underline{c}_i))x_i^*+\sum_{j=1}^{n_2}(\underline{d}_j+\gamma_j(\bar{d}_j-\underline{d}_j))y_j^*$$

由于固定了 δ 和 γ 值, 易知, (x^*,y^*) 使下层目标函数 $f_2(x,y)$ 在 $S(\rho_1,\sigma_1,\zeta)$ 上亦达到最优值, 则有 $(x^*,y^*)\in R(\rho_1,\sigma_1,\zeta)$, 即 $R(\rho_2,\sigma_2,\zeta)\subseteq R(\rho_1,\sigma_1,\zeta)$.

2) 任取 $(x,y)\in S(\rho,\sigma,\zeta_1)$, 由 $\zeta_1\le\zeta_2$, 得 $r(\zeta_1)\le r(\zeta_2)$, 则 $A(\rho_1)x+B(\sigma_1)y\le r(\zeta_1)\le r(\zeta_2)$. 所以 $(x,y)\in S(\rho,\sigma,\zeta_2)$, 从而 $S(\rho,\sigma,\zeta_1)\subseteq S(\rho,\sigma,\zeta_2)$. 对于固定的白化系数 δ,γ , 任取 $(x^*,y^*)\in R(\rho,\sigma,\zeta_1)$, 则 $(x^*,y^*)\in S(\rho,\sigma,\zeta_1)$, 由上述结论亦有 $(x^*,y^*)\in S(\rho_2,\sigma_2,\zeta)$. 由定理 1 中 2) 的证明知, (x^*,y^*) 使下层目标函数 $f_2(x,y)$ 在 $S(\rho,\sigma,\zeta_2)$ 上亦达到最优值, 则 $(x^*,y^*)\in R(\rho,\sigma,\zeta_2)$, 即 $R(\rho,\sigma,\zeta_1)\subseteq R(\rho,\sigma,\zeta_2)$.

定义 4 当 $\alpha=\beta=\delta=\gamma=\zeta=1,\rho=\sigma=0$ 时, 对应的定位规划 $BLP(1,1,1,1,0,0,1)$ 称为 BLPGP 的理想模型, 其目标最优值记为 $\max\overline{f_1}$. 当 $\alpha=\beta=\delta=\gamma=\zeta=0,\rho=\sigma=1$ 时, 对应的定位规划 $BLP(0,0,0,0,1,1,0)$ 称为 $BLPGP$ 的临界模型, 其最优值记为 $\max\underline{f_1}$.

把下层目标函数表达式看作上层问题的约束条件, 则有下面结论:

定理 2 在 $BLP(\alpha,\beta,\delta,\gamma,\rho,\sigma,\zeta)$ 中, 对任意的 $\alpha,\beta,\delta,\gamma,\rho,\sigma,\zeta\in[0,1]$, 有

$$\max\underline{f_1}\le\max f_1(\alpha,\beta,\delta,\gamma,\rho,\sigma,\zeta)\le\max\overline{f_1}.$$

证明 先证 $\max\underline{f_1}=\max f_1$ (0,0,0,0,1,1,0)$\le\max f_1(\alpha,\beta,\delta,\gamma,\rho,\sigma,\zeta)$. 由于模型的上下层目标函数均为线性函数且 $x,y\ge 0,\alpha\ge 0,\beta\ge 0,\delta\ge 0,\gamma\ge 0$, 则有关系式 $\max f_1(0,0,0,0,1,1,0)\le\max f_1(\alpha,\beta,\delta,\gamma,1,1,0)$. 又因为 $\rho,\sigma\in[0,1],\zeta\ge 0$, 由定理 1 的结论得 $R(1,1,0)\subseteq R(\rho,\sigma,0)$, $R(\rho,\sigma,0)\subseteq R(\rho,\sigma,\zeta)$, 由可行域的关系, 得出关系式 $\max f_1(\alpha,\beta,\delta,\gamma,1,1,0)\le\max f_1(\alpha,\beta,\delta,\gamma,\rho,\sigma,0)\le\max f_1(\alpha,\,\beta,\delta,\gamma,\rho,\sigma,\zeta)$, 和上述关系式联立得:

$$\max f_1\le\max f_1(\alpha,\beta,\delta,\gamma,\rho,\sigma,\zeta).$$

同理可证 $\max f_1(\alpha,\beta,\delta,\gamma,\rho,\sigma,\zeta)\le\max\overline{f_1}(1,1,1,1,0,0,1)=\max\overline{f_1}$. 结论得证.

定义 5 对给定的 $\alpha,\beta,\delta,\gamma,\rho,\sigma,\zeta\in[0,1]$, 称 $\mu(\alpha,\beta,\cdots,\zeta)=\frac{\max f_1-\max \underline{f_1}}{\max\overline{f_1}-\max\underline{f_1}}$ 为 $BLP(\alpha,\beta,\delta,\gamma,\rho,\sigma,\zeta)$ 的满意度, 其中 $\max f_1=\max f_1(\alpha,\beta,\delta,\gamma,\rho,\sigma,\zeta)$.

命题 1 对给定的 $\alpha,\beta,\delta,\gamma,\rho,\sigma,\zeta\in[0,1]$ 有 $\mu(\alpha,\beta,\cdots,\zeta)\in[0,1]$.

3 漂移型灰色二层规划及解法

3.1 模型与定义

定义 6 漂移型灰色二层规划, 是指目标函数和约束条件中的有界灰参数按取数一致方式取不同数时所得到的规划, 即令 $\alpha=\beta=\delta=\gamma=\rho=\sigma=\zeta=\theta$, 其模型可表达为

$$(\mathrm{P}_1)\max_x f_1(x,y)=a_\theta(\otimes)x+b_\theta(\otimes)y$$

其中 y 解

$$(\mathrm{P}_2)\max_y f_2(x,y)=c_\theta(\otimes)x+d_\theta(\otimes)y \tag{2}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}A_\theta(\otimes)x+B_\theta(\otimes)y\le r_\theta(\otimes)\\0\le\theta\le1\\x,y\ge0\end{cases}$$

称上述模型为 θ 定位规划, 记为 $BLP(\theta)$, 上层目标函数最优值记为 $\max f_1(\theta)$, 其约束域记为 $S(\theta)$, 可行域为 $R(\theta)$. 为保证 $BLP(\theta)$ 的全局最优解存在, 给出以下假设:

假设 约束域 $S(\theta)$ 是非空紧集, 对 $\forall x\in T$, 下层问题在 $\Omega(x)$ 上有唯一的最优解.

推论 1 对任意的 $\theta\in[0,1]$, 有 $\max\underline{f_1}\le\max f_1(\theta)\le\max\overline{f_1}$.

定义 7 对给定的 $\theta\in[0,1]$, 称 $\mu(\theta)=\frac{\max f_1(\theta)-\max\underline{f_1}}{\max\overline{f_1}-\max\underline{f_1}}$ 为 $BLP(\theta)$ 的满意度, 由命题 1 知 $0\le\mu(\theta)\le1$.

定义 8 给定灰靶 $D=[\mu_0,1]$, 若 $\mu(\theta)\in D$, 称与之对应的最优解为 $BLP(\theta)$ 的满意解.

3.2 理论与算法

依据传统的 GLP 方法, 给出 $BLP(\theta)$ 的 “可信度” 算法.

一般情况下, 模型的可信度由研究对象决定, 可根据具体情况给出. 如果满意度 μ 值已给出 (记为 μ_0), 则其求解步骤为:

Step1 取 $\alpha=\beta=\zeta=1$, $\rho=\sigma=0$, 求得最优值 $\max\overline{f_1}$; 取 $\alpha=\beta=\zeta=0,\rho=\sigma=1$, 求得最优值 $\max\underline{f_1}$.

Step2 给定一个 θ 值, 求取 $\max f_1$.

Step3 计算可信度 $\mu(\theta)$.

Step4 若 $\mu(\theta)>\mu_0$, 停止计算, 输出最优解. 否则, 转 Step2.

传统的 GLP 方法主要是通过定义和测试 “可信度” 来求解. 这种 “可信度” 方法要么没有解要么没有把不确定信息带进优化过程和解中, 所以不能充分反映灰色因素的作用, 算法并不是很完美. 本文针对 $BLP(\theta)$ 给出了一种新的求解方法.

定理 3 对于确定 θ 值的 $BLP(\theta)$, 当上层给定某个 $x\in S(\theta)$ 时, y 是下层规划的解的充要条件为: 存在 $\lambda\ge0$ 使得 y 满足以下约束条件

$$\begin{cases}-d_\theta(\otimes)^{\mathrm{T}}+B_\theta(\otimes)^{\mathrm{T}}\lambda^u-\lambda^v=0\\A_\theta(\otimes)x+B_\theta(\otimes)y-r_\theta(\otimes)\le0\\\lambda_{m+i}y_i=0,\ \ i=1,2,\cdots,n_2\\\lambda_i(A_i(\otimes)x+B_i(\otimes)y-r_i(\otimes))=0,\ i=1,2,\cdots,m\\y\ge0\end{cases}$$

其中 $\lambda=[\lambda^u,\lambda^v]^{\mathrm{T}}$, $\lambda^u=[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m]^{\mathrm{T}}$, $\lambda^v=[\lambda_{m+1},\lambda_{m+2},\cdots,\lambda_{m+n_2}]^{\mathrm{T}}$.

证明 确定 θ 值后, $BLP(\theta)$ 问题白化为 BLP 问题. 当上层给定某个 $x\in S(\theta)$ 后, BLP 的下层规划转化为关于 y 的单层线性规划问题, 令 $r_\theta(\otimes)=[r_1(\otimes),r_2(\otimes),\cdots,r_m(\otimes)]^{\mathrm{T}},B_\theta(\otimes)=[B_1(\otimes),B_2(\otimes),\cdots,B_m(\otimes)]^{\mathrm{T}}$,

$A_\theta(\otimes)=[A_1(\otimes),A_2(\otimes),\cdots,A_m(\otimes)]^{\mathrm{T}}$, 把函数 $\max\limits_y f_2(x,y)=c_\theta(\otimes)x+d_\theta(\otimes)y$ 转化为 $-\min\limits_y(-f_2(x,y))=-(-c_\theta(\otimes)x-d_\theta(\otimes)y)$. 由于 $f_2(y)$ 与其约束条件具有连续的一阶偏导数且为线性函数, 则此规划在可行域 $S(\theta)$ 上满足 Kuhn-Tuker 条件且为充要条件. 故应用 Kuhn-Tuker 条件, 若 $y\in S(\otimes)$ 是下层规划的解, 则存在 $\lambda=[\lambda^u,\lambda^v]^{\mathrm{T}}(\lambda^u=[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m]^{\mathrm{T}}$, $\lambda^v=[\lambda_{m+1},\lambda_{m+2},\cdots,\lambda_{m+n_2}]^{\mathrm{T}})$ 使得

$$\begin{aligned}&\nabla_y L(y,\lambda)=\nabla f_2(y)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\nabla(A_i(\otimes)x+B_i(\otimes)y-r_i(\otimes))-\sum_{i=m+1}^{m+n_2}\lambda_i\nabla y_i=0\\&A_\theta(\otimes)x+B_\theta(\otimes)y-r_\theta(\otimes)\le 0\\&\lambda\ge 0\\&\lambda_i(A_i(\otimes)x+B_i(\otimes)y-r_i(\otimes))=0,\quad i=1,2,\cdots,m\end{aligned}$$

其中 $L(y,\lambda)$ 为 $L(y,\lambda)=f_2(y)+\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i(A_i(\otimes)x+B_i(\otimes)y-r_i(\otimes))-\sum\limits_{i=m+1}^{m+n_2}\lambda_i y_i$.

化简上述式子即可得出结论.

推论 2 对于 $BLP(\theta)$ 问题, 用下层规划的 K-T 条件来代替下层规划问题, 则模型转化为如下等价形式的单层规划:

$$\max_{x,y,\lambda} f_1(x,y)=a_\theta(\otimes)x+b_\theta(\otimes)y$$
$$\begin{cases}-d_\theta(\otimes)^{\mathrm{T}}+B_\theta(\otimes)^{\mathrm{T}}\lambda^u-\lambda^v=0\\A_\theta(\otimes)x+B_\theta(\otimes)y-r_\theta(\otimes)\le 0\\\lambda_{m+i}y_i=0,\ \ i=1,2,\cdots,n_2\\\lambda_i(A_i(\otimes)x+B_i(\otimes)y-r_i(\otimes))=0,\ i=1,2,\cdots,m\\x,y\ge 0,\lambda\ge 0\end{cases}$$

下层规划问题的对偶的可行解集为 $V=\{-d_\theta(\otimes)^{\mathrm{T}}+B_\theta(\otimes)^{\mathrm{T}}\lambda^u-\lambda^v=0,\lambda\ge 0\}$. 显然 V 是有界的, 由线性规划的理论知 V 至多有有限个顶点. 利用线性规划的方法得到 V 的所有顶点, 记为 $V^E=\{\lambda^1,\lambda^2,\cdots,\lambda^t\}$. 这样就可以把上述问题转化为一系列的线性规划问题 $LP(\lambda^i)$, $i=1,2,\cdots,t$. 因为 S 和 R 是非空有界的, 因此对于 $i=1,2,\cdots,t$, 问题 $LP(\lambda^i)$ 有最优解, 令 $I\in\{1,2,\cdots,t\}$, 则存在 $i\in I$ 使得问题 $LP(\lambda^i)$ 有最优解, 记为 (x^i,y^i), 最优值记为 $f_1(x^i,y^i)$, 令 $F(x^k,y^k)=\max\{f_1(x^i,y^i)\,|i\in I\}$. 因此可以得到下面的结论:

定理 4 (x^k,y^k) 是漂移型灰色规划问题 (2) 的最优解.

由推论 1 知, 若 $BLP(\theta)$ 问题存在可行解, 则其目标函数最优值一定有界, 且 θ 的取值决定了模型的目标优化值. 把 θ 取值看作是对 [0,1] 区间的分割, 区间分割得越细, 所得到的目标函数值越接近函数最优值, 令 $\max f_1=\max\{f_1(\theta_1),f_1(\theta_2),\cdots,f_1(\theta_n)\}$, $\theta_i=i/n, i=0,1,2,\cdots,n$. 根据结果精确值的要求来确定 n 的取值.

根据以上讨论, 求解 BLPGP 问题的算法可描述如下:

Step1 构造关于 θ 的漂移模型并转化为单层规划模型, 令 $i=0$, $\max f_1=0$.

Step2 令 $\theta=i/n$, 用线性规划方法来获得 V 的所有顶点 $V^E=\{\lambda^1,\lambda^2,\cdots,\lambda^t\}$, 并带入单层规划模型 $LP(\lambda^k)$, $k=1,2,\cdots,t$.

Step3 分别用单纯形法求解问题 $LP(\lambda^k)$, $k=1,2,\cdots,t$. 如果没有可行解, 记最优解为 $(0,0)$, 最优值为 $\max f_1^k(\theta_i)=-\infty$; 否则记最优解为 (x_i^k,y_i^k), 最优值为 $\max f_1^k(\theta_i)$.

Step4 令 $\max f_1(\theta_i)=\max\{\max f_1^k(\theta_i)\,|k=1,2,\cdots,t\}$, 对应的最优解记为 (x_i^*,y_i^*). 如果 $\max f_1<\max f_1(\theta_i)$, 令 $\max f_1=\max f_1(\theta_i)$, $(x,y)=(x_i^*,y_i^*)$; $i=i+1$.

Step5 当 $i<n$ 时, 转 Step2; 当 $i=n$ 时, 输出最优值 $\max f_1$ 和最优解 (x,y).

上述算法思想在 MATLAB 软件上完成.

3.3 全局收敛性分析

依据假设条件: 约束域 $S(\theta)$ 是非空紧集, 对 $\forall x\in T$, 下层问题在 $\Omega(x)$ 上有唯一的最优解, 由文献 [8] 知, $BLP(\theta)$ 问题存在全局最优解, 不妨设为 (x^*,y^*). 对于给定的 θ 值, $BLP(\theta)$ 问题转化为 BLP 问题. 由

于约束域 S 是非空紧集, 则 R 是闭连通的, 从而 BLP 一定有全局最优解, 且可在 S 的上极点上找到[7]. 由于 V 为下层规划问题的对偶的可行解集, 由线性规划对偶理论知, V 的极点也是 S 的极点[10]. 因此, 由单层规划理论和定理 4 知, 基于 K-T 条件所得到的最优解为全局最优解.

对 θ 的取值区间进行 n 等分, 令 $\theta_i = i/n$, 记 θ_i 值所对应的全局最优解为 (x_i^*, y_i^*). 不妨把 θ 看作 $BLP(\theta)$ 问题的一个决策变量, 依据推论 2, 把 $BLP(\theta)$ 问题转化为单层二次规划, 设其约束域为 $S'(\theta)$, 则 $S'(\theta)$ 为一个非空凸集. 设 $S(\theta_i)$ 为用 θ_i 对 $S'(\theta)$ 进行分割所得到的割平面, 显然 $S(\theta_i)$ 也是一个非空凸集, 且 $S(\theta_i)$ 的极点在 $S'(\theta)$ 的面上. 由线性规划的理论知, 对于固定的 θ_i, (x_i^*, y_i^*) 必在 $S(\theta_i)$ 的极点上得到, 则 (x_i^*, y_i^*) 是 $S(\theta_i)$ 的极点, 也在 $S'(\theta)$ 的面上. 不妨在 $S'(\theta)$ 的表面上做一条连续的曲线 $l(\theta)$, 使得所有的极 (x_i^*, y_i^*) 和全局最优解 (x^*, y^*) 都落这条曲线上, 设点 (x^*, y^*) 所对应的平行于 $S(\theta_i)$ 的割平面为 $S(\theta^*)$, 由于 $l(\theta)$ 是连续的曲线, 则存在正数 $\delta > 0$, 使得当 $|\theta_k - \theta^*| < \delta$ 时有 $(x_k^*, y_k^*) \to (x^*, y^*)$, n 的取值只要满足条件 $n > 1/\delta$, 就可以找到这样的 θ 值和对应的全局最优解. 因此该算法具有全局收敛性.

3.4 算例

下面用本文提出的两种方法来求解算例.

$$(\mathrm{P}_1)\max_x f_1(x,y) = a(\otimes)x + b(\otimes)y$$

其中 y 解

$$(\mathrm{P}_2)\max_y f_2(x,y) = c(\otimes)x + d(\otimes)y \tag{3}$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} e(\otimes)x + f(\otimes)y \le 320 \\ g(\otimes)x + h(\otimes)y \le -198 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$

其中

$$a(\otimes) \in [-5,-2], b(\otimes) \in [-2,-1], c(\otimes) \in [-6,-2], d(\otimes) \in [-3,-1],$$

$$e(\otimes) \in [2,10], f(\otimes) \in [-5,-2], g(\otimes) \in [-9,-6], h(\otimes) \in [-5,-2].$$

解 构造漂移模型:

$$\tilde{a}(\otimes) = -5+3\theta, \tilde{b}(\otimes) = -2+\theta, \tilde{c}(\otimes) = -6+4\theta, \tilde{d}(\otimes) = -3+2\theta$$

$$\tilde{e}(\otimes) = 2+8\theta, \tilde{f}(\otimes) = -5+3\theta, \tilde{g}(\otimes) = -9+3\theta, \tilde{h}(\otimes) = -5+3\theta$$

I "可信度" 方法

给定 $\mu_0 = 0.6$, 取 $\theta = 0.5$, 解得 $\max\overline{f_1} = -39.6000$, $\max\underline{f_1} = -165.6250$, 上层目标函数最优值为 $\max f_1 = -84.8571$, 下层目标函数最优值为 $\max f_2 = -113.1428 (x,y) = (0.0000, 54.5714)$. 计算可信度得, $\mu_\theta = 0.6408$, 显然 $\mu_\theta > \mu_0$, 因此, 模型的目标最优值为 -84.8571.

II 不依赖 "可信度" 方法

把漂移模型代入 (3) 并转化为等价模型

$$\max f(x,y) = (-5+3\theta)x + (-2+\theta)y$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} (2+8\theta)x + (-5+3\theta)y \le 320 \\ (-9+3\theta)x + (-5+3\theta) \le -198 \\ x, y \ge 0 \\ (5-3\theta)\lambda_1 + (5-3\theta)\lambda_2 + \lambda_3 = 3-2\theta \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ge 0 \\ \lambda_1((2+8\theta)x + (-5+3\theta)y - 320) = 0 \\ \lambda_2((9-3\theta)x + (5-3\theta)y - 198) = 0 \\ \lambda_3 y = 0 \end{cases}$$

令 $n = 1000$, 在 MATLAB 软件上运行结果为 $\theta = 1$,$x = 32.3750$, $y = 1.8750$, $\max f(x,y) = -66.6250$, 目标函数值与灰色系数 θ 的关系如图 1. 因此模型的目标最优值为 -66.6250. 通过上述两种方法的比较, 第二种算法具有可行性和精确解的优点.

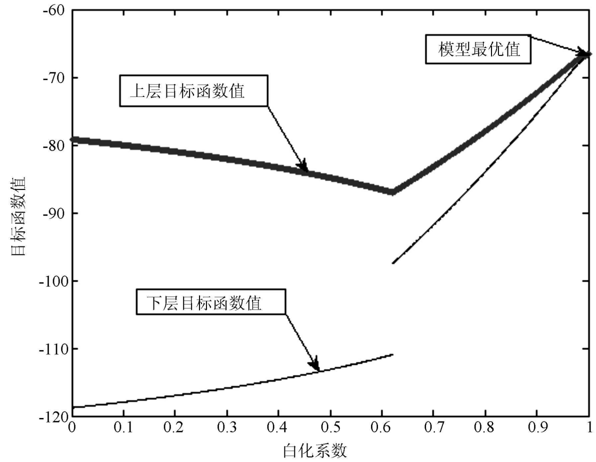

图 1

4 结论

本文首次提出了具有灰色特性的二层线性规划问题, 而灰色的特性给问题的求解带来很大的难度. 结合单层灰色线性规划问题, 给出了有关的基本定义、定理及相关算法, 有效地克服了灰色特性所带来的难度. 最后, 利用两种方法对算例进行了求解, 并且验证了算法的有效性.

参考文献

[1] 滕春贤, 李智慧. 二层规划的理论与应用 (第二版)[M]. 北京: 科学出版社, 2002.
Teng C X, Li Z H. The Theory and Application of Bilevel Programming[M]. Beijing: Science Press, 2002.

[2] Fortuny J, McCall B. A representation and economic interpretation of a bilevel programming problem[J]. J Oper Res Soc, 1981, 32(9): 783–792.

[3] Candler W, Townsley R. A linear bilevel programming problem[J]. Computers & Operations Research, 1982(9): 59–72.

[4] Bialas W F, Karwan M H. Two-level linear programming[J]. Management Science, 1984, 30(8): 1004–1020.

[5] Nicolaisen J, Contrera J, Conejo A J, et al. Forecasting next day electricity prices by time series models[J]. IEEE Trans on Power Systems, 2002, 17(2): 342–348.

[6] 王先甲, 冯尚友. 二层系统最优化理论 [M]. 北京: 科学出版社, 1995.
Wang X J, Feng S Y. Optional Theory of Bilevel Systems[M]. Beijing: Science Press, 1995.

[7] Bard J F. Practical Bilevel Optimization: Algorithms and Applications[M]. Boston: Kluwer Academic, Publishers, 1998.

[8] 万仲平, 肖昌育, 王先甲, 等. 不确定市场下的一种二层规划最优竞价模型 [J]. 电力系统自动化, 2004, 28(19): 12–15.
Wan Z P, Xiao C Y, Wang X J, et al. Bilevel programming model of optional bidding strategies under the uncertain electricity markets[J]. Automation of Electric Power Systems, 2004, 28(19): 12–15.

[9] 刘思峰, 党耀国, 方志耕. 灰色系统理论及其应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2004.
Liu S F, Dang Y G, Fang Z G. Grey System Theory and Its Application[M]. Beijing: Science Press, 2004.

[10] 赵茂先, 高自友. 求解线性双层规划的割平面算法 [J]. 北京: 北京交通大学学报, 2005, 3(29): 65–69.
Zhao M X, Gao Z Y. A cutting plane algorithm for solving linear bilevel programs[J]. Journal of Beijing Jiaotong University, 2005, 3(29): 65–69.